

09 décembre 2025

## Corrigé 12

**Exercice 1.** Dans chacun des cas suivants, trouver toutes les valeurs propres de la transformations linéaire  $\alpha : V \rightarrow V$ , et tous les vecteurs propres associés.

(a)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(x, y) = (2x + y, -y)$ .

(b)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$ .

(c)  $V = \mathbb{C}^2$ ,  $\alpha(x, y) = (x + y, -x + y)$ .

(d)  $V = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ .

(e)  $V = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ,  $\alpha(f)(x) = -xf(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{C}$ .

(f)  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions continues à valeurs réelles définies sur l'intervalle fermé  $[a, b]$ ,  $\alpha : V \rightarrow V$ ,  $\alpha(f)(x) = -xf(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

**Solution 1.**

(a) La matrice de  $\alpha$  par rapport à la base canonique  $E$  de  $V = \mathbb{R}^2$  est  $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $\alpha$  est

$$\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & -1-t \end{vmatrix} = (t-2)(t+1).$$

Donc les valeurs propres de  $\alpha$  sont  $-1$  et  $2$ . La multiplicité algébrique de  $-1$  vaut 1 et celle de  $2$  est aussi 1.

L'espace propre  $E_{-1}$  est le noyau de  $\alpha - (-1) \cdot \text{id}$ . On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{-1} = \{(x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$  et  $f_1 = (1, -3)$  forme une base de  $E_{-1}$ . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de  $-1$ , qui est la dimension de  $E_{-1}$ , vaut 1.

L'espace propre  $E_2$  est le noyau de  $A - 2 \cdot I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ . Donc  $E_2 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  et  $f_2 = (1, 0)$  forme une base de  $E_2$ . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de  $2$ , qui est la dimension de  $E_2$ , vaut 1.

(b) La matrice de  $\alpha$  par rapport à la base canonique  $E$  de  $V = \mathbb{R}^2$  est  $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $\alpha$  est  $\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$ . Ce polynôme n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}$ , donc il n'existe pas de valeur propre pour  $\alpha$ .

(c) La matrice de  $\alpha$  par rapport à la base canonique  $E$  de  $V = \mathbb{C}^2$  est  $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $\alpha$  est  $\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -1 & 1-t \end{vmatrix} = t^2 - 2t + 2$ . Donc les valeurs propres de  $\alpha$  sont  $1 \pm i$ . La multiplicité algébrique de  $1 + i$  vaut 1 et celle de  $1 - i$  est aussi 1.

L'espace propre  $E_{1+i}$  est le noyau de  $\alpha - (1+i) \cdot \text{id}$ . On résout le système homogène associé à la matrice de coefficients  $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{1+i} = \{(-iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$  et  $f_1 = (-i, 1)$  forme une

base de  $E_{1+i}$ . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de  $1+i$ , qui est la dimension de  $E_{1+i}$ , vaut 1.

L'espace propre  $E_{1-i}$  est le noyau de  $\alpha - (1-i) \cdot \text{id}$ ; on résout le système homogène associé à la matrice de coefficients  $\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{1-i} = \{(iy, y) \mid y \in \mathbb{C}\}$  et  $f_2 = (i, 1)$  forme une base de  $E_{1-i}$ . On obtient aussi que la multiplicité géométrique de  $1-i$ , qui est la dimension de  $E_{1-i}$ , vaut 1.

(d) Soit  $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$  la base canonique de  $V = M_2(\mathbb{R})$ . Alors la matrice de  $\alpha$  par rapport

à la base  $E$  est  $A = (\alpha)_{E,E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Le polynôme caractéristique de  $\alpha$  est

$$\det(A - t \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -t & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -t \end{vmatrix} = (t - \sqrt{2})(t + \sqrt{2})(t^2 + 1).$$

Comme  $t^2+1$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{R}$ , les valeurs propres de  $\alpha$  sont  $\pm\sqrt{2}$ . La multiplicité algébrique de  $\sqrt{2}$  vaut 1 et celle de  $-\sqrt{2}$  est aussi 1.

L'espace propre  $E_{\sqrt{2}}$  est le noyau de  $\alpha - \sqrt{2} \cdot \text{id}$ . On résout le système homogène associé à la

matrice de coefficients  $\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{\sqrt{2}} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ . On

obtient aussi que la multiplicité géométrique de  $\sqrt{2}$ , qui est la dimension de  $E_{\sqrt{2}}$ , vaut 1.

L'espace propre  $E_{-\sqrt{2}}$  est le noyau de  $\alpha - (-\sqrt{2}) \cdot \text{id}$ . Comme avant on considère le système

homogène associé à la matrice  $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -2 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ . Donc  $E_{-\sqrt{2}} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ . On

obtient aussi que la multiplicité géométrique de  $-\sqrt{2}$ , qui est la dimension de  $E_{-\sqrt{2}}$ , vaut 1.

(e) On considère  $V = \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$  et  $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ . On cherche  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $f \neq 0$  tels que  $-xf(x) = \lambda f(x)$  pour tout  $x$ . Ceci équivaut à  $(x + \lambda)f(x) = 0$  pour tout  $x$ . Un vecteur propre non nul doit satisfaire : (1)  $f(x) = 0$  pour tout  $x \neq -\lambda$ , et (2)  $f(-\lambda) \neq 0$  est libre. Ainsi, toutes les valeurs complexes  $\lambda$  sont des valeurs propres et l'espace propre associé à  $\lambda$  est

$$E_\lambda = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \mid f(x) = 0 \text{ si } x \neq \lambda\}.$$

(f) On considère  $V = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  avec l'application linéaire  $\alpha(f)(x) = -xf(x)$ . Comme dans la partie (e), une valeur propre  $\lambda$  devrait vérifier

$$(\lambda + x)f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Cette équation impose que  $f(x) = 0$  pour tout  $x \neq \lambda$ . Dans la partie (e) cela ne posait pas de problème, car les fonctions considérées n'avaient pas besoin d'être continues; en revanche, ici, la continuité joue un rôle crucial : une fonction continue ne peut être nulle partout sauf en un seul point, sauf si elle est identiquement nulle. Donc la seule solution continue est la fonction nulle, qui ne peut pas être un vecteur propre. Par conséquent,  $\alpha$  n'a aucune valeur propre sur  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ .

**Exercice 2.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

- (a) Trouver les valeurs propres de  $A$ .
- (b) Trouver des bases des sous-espaces propres de  $A$ .
- (c) Peut-on déduire de (a) si  $A$  est inversible ou non ?
- (d) Donner les valeurs propres de  $A^2$ .
- (e) Donner des bases des sous-espaces propres de  $A^2$ .

**Solution 2.** De nouveau dans cet exercice, on identifie  $\mathbb{R}^3$  avec l'ensemble des vecteurs colonnes dans  $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ .

(a) On calcule  $c_A(t)$ .

$$A - tI_3 = \begin{pmatrix} -2-t & 6/5 & 2 \\ 0 & -1-t & 1 \\ -5 & 5 & 3-t \end{pmatrix}.$$

Alors,  $\det(A - tI_3) = -t(t^2 - 2)$ . Si on veut  $\det(A - tI_3) = 0$ , on obtient les solutions  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{2}$  et  $\lambda_3 = -\sqrt{2}$  (qui sont les valeurs propres de  $A$ ).

(b) (1) On cherche  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $A\mathbf{v}_1 = 0\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ . Via le procédé d'échelonnage, on obtient

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -\frac{1}{2}L_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow 5L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -2L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ce qui veut dire que l'ensemble des solutions du système  $A\mathbf{v}_1 = 0$  est  $\{(\frac{8}{5}c, c, c)^t \mid c \in \mathbb{R}\}$ . Ainsi, l'espace propre correspondant à la valeur propre 0 est  $\text{Vect}((\frac{8}{5}, 1, 1)^t)$ .

(2) On cherche  $\mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\mathbf{v}_2$ . Via le procédé d'échelonnage, et en posant  $x = \sqrt{2}$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} -2-x & \frac{6}{5} & 2 \\ 0 & -1-x & 1 \\ -5 & 5 & 3-x \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} -5 & 5 & 3-x \\ 0 & -1-x & 1 \\ -2-x & \frac{6}{5} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow -L_1 \\ L_3 \rightarrow 5L_3}} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ -10-5x & 6 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow (2+x)L_1 + L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -4-5x & 4-x+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & -4-5x & 6-x \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -5L_2 + L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & -1-x & 1 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & -1-x & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \xrightarrow{(1+x)L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 2-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3+x \\ 0 & 1 & 1-x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $\mathbf{v}_2 = (\frac{1}{5}(-2+4\sqrt{2})c, (\sqrt{2}-1)c, c)^t$  où  $c \in \mathbb{R}$  est quelconque. Donc l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_2 = \sqrt{2}$  est

$$\text{Vect}((-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t).$$

- (3) On cherche  $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$  tel que  $A\mathbf{v}_3 = -\sqrt{2}\mathbf{v}_3$ . On peut utiliser le même échelonnage que ci-dessus mais avec  $x = -\sqrt{2}$  (ce qui marche bien puisqu'on a toujours  $x^2 = 2$ ). On obtient alors  $\mathbf{v}_3 = (\frac{-1}{5}(2+4\sqrt{2})c, (-1-\sqrt{2})c, c)^t$  où  $c \in \mathbb{R}$  est quelconque. Donc l'espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_3 = -\sqrt{2}$  est

$$\text{Vect}((-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t).$$

- (c) Puisque 0 est valeur propre de  $A$ , on sait qu'il existe un vecteur  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  non nul, tel que  $A \cdot \mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ . Par un des critères d'inversibilité d'une matrice, on a que  $A$  n'est pas inversible.
- (d) On note que si  $Av = \lambda v$  alors  $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2v$ . Donc si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  alors  $\lambda^2$  est une valeur propre de  $A^2$ . Dans le cas précis où  $A$  est la matrice donnée, on a donc que 0 et 2 sont des valeurs propres de  $A^2$ .
- (e) — On cherche  $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $A^2\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ . Il suffit de remarquer que si  $\mathbf{v}_1$  est un vecteur propre pour  $A$  pour la valeur propre 0 (c.-à-d.  $\mathbf{v}_1 \in \text{Vect}(\frac{8}{5}, 1, 1)^t$ ), on a  $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ , donc  $A^2\mathbf{v}_1 = A(A\mathbf{v}_1) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ . Donc l'espace propre associé à  $\mu_1$  contient  $(\frac{8}{5}, 1, 1)^t$ .
- On cherche  $\mathbf{u}_2 \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $A^2\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_2$ . On remarque que si  $\mathbf{v}_2$  est un vecteur propre pour  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_2 = \sqrt{2}$  (c.-à-d.  $\mathbf{v}_2 \in \text{Vect}(-2+4\sqrt{2}, 5\sqrt{2}-5, 5)^t$ ), on a  $A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\mathbf{v}_2$ , donc  $A^2\mathbf{v}_2 = A(A\mathbf{v}_2) = \sqrt{2}A\mathbf{v}_2 = \sqrt{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_2$ . De même, si  $\mathbf{v}_3$  est un vecteur propre pour  $A$  pour la valeur propre  $\lambda_3 = -\sqrt{2}$  (c.-à-d.  $\mathbf{v}_3 \in \text{Vect}((-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t$ ), on a  $A\mathbf{v}_3 = -\sqrt{2}\mathbf{v}_3$ , donc  $A^2\mathbf{v}_3 = A(A\mathbf{v}_3) = -\sqrt{2}A\mathbf{v}_3 = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2})\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_3$ . Donc l'espace propre associé à  $\mu_1$  contient

$$\text{Vect}((-2+4\sqrt{2}), 5\sqrt{2}-5, 5)^t, (-2(1+2\sqrt{2}), (-5)(\sqrt{2}+1), 5)^t).$$

- On note que ces trois vecteurs sont linéairement indépendants et comme le polynôme caractéristique de  $A^2$  est de degré 3, et la multiplicité d'une valeur propre dans ce polynôme caractéristique (c'est-à-dire la multiplicité algébrique) est au moins la dimension de l'espace propre pour la valeur propre, il n'existe aucune autre valeur propre pour  $A^2$ , ni vecteur propre linéairement indépendant des trois déjà trouvés.

### Exercice 3.

- (a) Soit  $P$  une matrice inversible de taille  $2 \times 2$  et  $D$  une matrice diagonale. On pose  $A = PDP^{-1}$ . Montrer que  $A^2 = PD^2P^{-1}$ , puis déduire une formule qui permet de calculer  $A^{10}$ .
- (b) On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que  $A = PDP^{-1}$ , puis calculer  $A^{10}$  en utilisant le point (a).

**Solution 3.**

- (a) Soit  $P$  une matrice inversible de taille  $2 \times 2$  et  $D$  une matrice diagonale. On pose  $A = PDP^{-1}$ . On calcule  $A^2$  en utilisant simplement le fait que  $P^{-1}P = I_2$  :

$$A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}.$$

Comme  $D$  est diagonale alors son carré est aussi une matrice diagonale. Les coefficients sur la diagonale sont les carrés des coefficients de la diagonale de  $D$ .

De manière générale, la puissance d'une matrice diagonalisable  $A$  est égale à  $A^n = PD^nP^{-1}$  pour tout  $n = 1, 2, 3, \dots$

Ceci est facile à montrer par un raisonnement par récurrence :

1. Par hypothèse, la propriété est satisfaite pour  $n = 1$ .
2. La ligne suivante montre que si la propriété est vraie pour  $n$  elle est vraie pour  $n + 1$  :

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = PD^nP^{-1} \cdot PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

3. On conclut par récurrence.

- (b) On calcule d'abord l'inverse de  $P$  :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que  $A = PDP^{-1}$ . Par a), on a  $A^{10} = PD^{10}P^{-1}$ , où

$$D^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car  $D$  est diagonale et donc  $D^{10}$  aussi, et les coefficients de la diagonale de  $D^{10}$  sont les coefficients de la diagonale de  $D$  à la puissance 10. On calcule :

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2048 & 1 \\ 1024 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2047 & -2046 \\ 1023 & -1022 \end{pmatrix}.$$


---

**Exercice 4.** Soit  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $2 \times 2$ , dont une base est donnée par  $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, S_3\}$  où

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit  $T : \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  la transformation linéaire définie par

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - d & -b \\ -b & -a + 2d \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer les 3 valeurs propres (distinctes)  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  de  $T$ .
- (b) Pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ , trouver un vecteur propre  $M_i \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  associé à  $\lambda_i$ . Montrer que  $\mathcal{B}' = \{M_1, M_2, M_3\}$  est une base de  $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ .
- (c) Ecrire la matrice  $[T]_{\mathcal{B}'}$  de  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}'$ .
- (d) Calculer  $T^{10}(A)$ , où  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Solution 4.** On calcule les images des différents vecteurs de base :

$$T(S_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T(S_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(S_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de l'application  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  est :

$$(T)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) On calcule :

$$\begin{aligned} \det((T)_{\mathcal{B},\mathcal{B}} - t \cdot I_3) &= (2-t)^2 \cdot (-1-t) + (1+t) = (t+1)(-(2-t)^2 + 1) = (t+1)(-t^2 + 4t - 3) \\ &= -(t-1) \cdot (t+1) \cdot (t-3). \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$  et  $\lambda_3 = 3$ .

b) Dans ce point,  $A$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ . On cherche les différents espaces propres. Pour  $\lambda = 1$ , on trouve un vecteur propre  $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . De même, pour  $\lambda = -1$ , on trouve un vecteur propre  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (on aurait pu le deviner, puisque  $T(S_2) = -S_2$ ). Finalement, pour la dernière valeur propre, on trouve  $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

On sait que trois vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants (vous pouvez aussi le vérifier à la main). Comme l'espace des matrices symétriques de taille 2 est de dimension 3, il s'agit d'une base.

c) Comme  $(M_1, M_2, M_3)$  est une base de vecteurs propres, associés aux valeurs propres 1,  $-1$  et 3 respectivement, on a  $(T)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

d) On remarque que l'on peut écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-1) \cdot M_3,$$

c'est-à-dire que les composantes de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}'$  sont  $(2, 2, -1)$ . Puisque

$$(T^{10}(A))_{\mathcal{B}'} = (T^{10})_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} \cdot [A]_{\mathcal{B}'} = ((T)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'})^{10} \cdot [A]_{\mathcal{B}'},$$

les composantes de  $T^{10}(A)$  dans la base  $\mathcal{B}'$  sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{10} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3^{10} \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a

$$T^{10}(A) = 2 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + (-3^{10})M_3 = \begin{pmatrix} 2 - 3^{10} & 2 \\ 2 & 2 + 3^{10} \end{pmatrix}.$$